ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 21 AOUT 1916.

PRÉSIDENCE DE M. PAUL APPELL.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MINÉRALOGIE. — *Sur quelques roches volcaniques mélanocrates des Possessions françaises de l'océan Indien et du Pacifique.* Note de M. A. LACROIX.

Au cours de mes recherches sur les laves des Possessions françaises de l'océan Indien et du Pacifique, j'ai rencontré un grand nombre de types mélanocrates qui demandent à être décrits en détail. On sait en effet que les roches de cette nature sont assez rares ou peut-être plus exactement n'ont été jusqu'ici que peu étudiées ; les pétrographes, habitués à spécifier les roches uniquement d'après leur composition minéralogique qualitative, ne les ayant guère distinguées jusqu'ici des laves basaltiques.

Tout d'abord, quelques indications d'ordre général sont nécessaires. Dès 1902, dans mon étude de la province pétrographique d'Ampasindava à Madagascar ([1]), généralisant les notions de roches leucocrates et mélanocrates de M. Brögger, j'ai indiqué l'utilité d'établir, dans toutes les familles de roches définies par une même composition minéralogique, cinq grandes divisions : types hololeucocrates, entièrement ou presque entièrement constitués par des minéraux blancs (feldspaths ou feldspathoïdes), leucocrates, mésocrates, mélanocrates et enfin holomélanocrates, exclusivement ou essentiellement formés par des minéraux colorés, en général ferro-magnésiens.

Peu après, MM. W. Cross, Iddings, Pirsson et Washington ont publié ([2])

([1]) *Nouvelles Archives du Muséum*, 4e série, t. 4, 1902, p. 161.

([2]) *Quantitative classification of igneous rocks*, Chicago, 1903.

leur classification chimico-minéralogique comprenant aussi cinq classes suivant la teneur en éléments ferrugineux, mais ils ont considéré, non plus la composition minéralogique exprimée, mais une composition minéralogique théorique déduite de l'analyse par le calcul. Ce n'est donc plus une classification des *roches*, mais une classification de leurs *magmas;* elle présente d'ailleurs un très grand intérêt à divers points de vue et depuis lors je n'ai cessé de m'en servir comme adjuvant de la classification minéralogique; il paraît toutefois nécessaire d'introduire dans cette dernière des notions plus précises de quantité; c'est ce que je ferai dans ce qui va suivre. Pour les raisons développées par les savants américains, je pense que dans une classification pétrographique, quel qu'en soit le point de départ, les limites des divisions ne peuvent être qu'arbitraires et qu'il y a avantage à leur donner une rigidité comparable à celle de l'échelle du thermomètre.

J'adopterai, pour les subdivisions des groupes *minéralogiques*, les mêmes valeurs que dans la classification *chimico-minéralogique;* mes roches hololeucocrates seront celles renfermant moins de 12,5 [1] pour 100 d'éléments colorés *exprimés;* les leucocrates en renferment de 12,5 à 37,5; les mésocrates de 37,5 à 62,5; les mélanocrates de 62,5 à 87,5; enfin les hololeucocrates moins de 87,5. Cette communauté d'échelle a l'avantage d'établir une coïncidence assez grande entre les deux premières classes des deux classifications, mais il est bien évident que cette coïncidence s'atténue de plus en plus à mesure qu'augmente le pourcentage des éléments colorés; ceux-ci en effet sont surtout des micas, des pyroxènes et des amphiboles, c'est-à-dire des minéraux plus ou moins alumineux, et l'on sait que le principe du calcul de la composition virtuelle d'un magma consiste à attribuer l'alumine aux alcalis d'abord et à de la chaux ensuite pour obtenir des feldspathides : la quantité de feldspaths calculés indiquera donc toujours le maximum de ce que pourrait fournir le magma dans les conditions les plus favorables à la production de ces minéraux. Je désignerai dorénavant sous le nom de feldspaths *potentiels* la différence numérique existant entre les proportions des feldspaths *virtuels* (calculés) et celles des feldspaths *exprimés;* cette notion de feldspaths potentiels fournit la mesure de l'alumine contenue dans les éléments ferro-magnésiens et c'est celle-ci qui est le grand facteur de la différence de composition minéralogique existant souvent entre les formes grenues et les formes microlitiques prenant naissance par consolidation d'un même magma (de composition chimique

---

[1] Voir (*op. cit.*) les raisons qui ont guidé dans le choix de ces nombres.

constante). J'appellerai types *hétéromorphes* les roches de *composition minéralogique différente* présentant une *composition chimique analogue*.

Trois exemples empruntés à quelques-unes de mes observations antérieures feront bien comprendre ma pensée. J'ai rencontré dans les Pyrénées, au milieu des lherzolites, des traînées et des filons de roches grenues, essentiellement constituées par du diopside, de la bronzite, un grenat et un spinelle : ces roches ne sont pas des pyroxénolites ordinaires, car elles renferment jusqu'à 17 pour 100 d'alumine, et en même temps beaucoup de chaux. Leur composition virtuelle fournit jusqu'à 30 pour 100 d'anorthite qui, on le voit, reste entièrement à l'état potentiel. Il existe des gabbros et des basaltes ayant la même composition chimique; d'autre part, en fondant ces roches spéciales, que j'ai appelées des *ariégites*, il est possible de faire cristalliser du plagioclase en même temps que de l'olivine et de l'augite. Les ariégites sont des types hétéromorphes de certains gabbros. De même, la sommaïte, que j'ai trouvée en blocs à la Somma, est une sorte de monzonite, dans laquelle la potasse se trouve dans de l'orthose qui est associée à de l'anorthite, à de l'augite et à beaucoup d'olivine; cette roche est hétéromorphe de certaines leucittéphrites microlitiques épanchées du même volcan dans lesquelles toute la potasse a servi à former de la leucite, accompagnée de labrador, de beaucoup d'augite et de fort peu d'olivine. Enfin, pour la même raison, les ponces leucitiques de Pompéi seront dites hétéromorphes des syénites néphéliniques du type de celle de Beemerville, qui ont sensiblement la même composition chimique, mais sont constituées par de la néphéline et de l'orthose.

Arrivons aux roches qui font plus particulièrement l'objet de cette Note : ce sont des formes mélanocrates de basaltes feldspathiques; elles sont hétéromorphes de péridotites et de pyroxénolites.

Picrites feldspathiques. — Le nom de *picrite* est donné actuellement à la forme d'épanchement de certaines péridotites; elles en sont hétéromorphes, car elles renferment toujours des plagioclases qui manquent généralement aux formes grenues de même composition chimique, surtout lorsque celles-ci sont amphiboliques. Pendant longtemps, les picrites n'ont été connues que dans des séries anciennes et par suite à l'état très altéré en raison de leur richesse en péridot; je crois avoir été le premier à décrire ce type pétrographique dans des laves modernes [1]. Elles abondent

[1] *Bull. Soc. géol. France*, t. 10, 1910, p. 119.

à Tahiti; je les ai rencontrées depuis lors à la Réunion dans les laves actuelles du Piton de la Fournaise et aussi dans celles du volcan éteint du massif du Piton des Neiges (Cilaos); enfin elles ont été rencontrées à Hawaï, etc., et il est vraisemblable que l'étude plus approfondie des basaltes très péridotiques permettra de multiplier le nombre de leurs gisements.

Ces picrites feldspathiques sont mélanocrates. Dans les exemples que j'ai étudiés et dont l'analyse est donnée plus loin, la proportion des éléments colorés oscille entre 70 et 85 pour 100; la quantité de péridot est toujours plus considérable que celle du pyroxène, elle atteint jusqu'à 70 pour 100. La structure varie de la microlitique à la doléritique. Dans les types les moins péridotiques, l'olivine et une partie de l'augite sont porphyriques dans une pâte noire, mais quand la proportion du péridot augmente et quand celui-ci devient prédominant, comme dans l'archipel Gambier, tous ses cristaux sont serrés les uns contre les autres et sont seulement cimentés par de grandes plages de plagioclases qui englobent de gros microlites d'augite et d'ilménite et se présentent même en cristaux distincts dans des cavités rappelant celles des basaltes doléritiques très feldspathiques.

Je donne ci-contre les analyses de trois picrites feldspathiques et, en regard, celle d'une péridotite non feldspathique de Madagascar et d'une roche un peu feldspathique (harrisite de la Réunion) qui a une composition comparable. Je fais suivre chacune de ces analyses des paramètres qui les caractérisent dans la classification chimico-minéralogique, mais on remarquera à la suite de ceux-ci, entre crochets et en italiques, d'autres paramètres sur lesquels je dois m'expliquer.

L'un des faits les mieux établis par les recherches récentes est la démonstration de la difficulté d'établir une classification naturelle des roches éruptives, car celles-ci forment des séries continues dans toutes les directions. Malgré cette continuité si évidente, et qu'ils ont d'ailleurs contribué plus que d'autres à démontrer, les auteurs du système chimico-minéralogique ont établi une discontinuité dans leur classification. Les subdivisions de leurs trois premières classes sont basées sur des rapports entre les quantités des minéraux blancs ou des éléments qui entrent dans leur constitution, alors qu'au contraire dans les deux dernières classes, ils n'ont plus considéré que les minéraux ferro-magnésiens ou les éléments chimiques qui les forment.

Cette manière de faire a évidemment ses raisons et certains avantages,

mais elle présente aussi de graves inconvénients, notamment lorsqu'il s'agit de suivre les variations d'une famille minéralogique telle que je la comprends. On peut suppléer à ce défaut en construisant une quatrième classe sur les mêmes principes que ceux qui ont servi à établir les trois premières. C'est celle dont j'inscris les paramètres entre crochets et en *italiques*. Son utilité est surtout grande dans les types mélanocrates les moins pauvres en minéraux blancs et elle s'atténue avec la diminution des alcalis et de la chaux feldspathisable. Quant à la dernière classe, la proportion des feldspathides virtuels est tellement faible qu'il n'y a plus d'intérêt à leur donner un rôle dans la classification.

Analyses : de la picrite feldspathique. — *a.* Du Piton de la Fournaise lave moderne (moy. de 2 analyses par M. Boiteau) : [*IV.5.4.4*] IV.(1)(2).4.1'.2.

b. De Papenoo (Tahiti) (M. Pisani) ([1]) ['*IV.5.'4.4'*]'IV.1'.4.1'.'2.

c. De Putua, à Mangareva (Archipel de Gambier) (M. Raoult) : [*IV.5'.3(4).3'*] IV (V).1'.4'.1.(1)(2).

d. De la péridotite (wehrlite) des bords de l'Itsindra (Madagascar) (M. Pisani) : [*IV.5.(3) 4.4*] IV.1.(3)(4).(1)2.(1)2.

e. De la harrisite de la rivière du Mât (Réunion) (M. Boiteau) : [*IV(V).5.4(5).3*] IV.1.4.1'.(1)2.

	a.	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*
SiO^2	43,96	43,85	41,24	42,70	41,68
Al^2O^3	9,84	9,07	4,51	6,70	6,28
Fe^2O^3	3,04	1,02	3,10	2,15	2,64
FeO	10,40	9,51	10,39	7,60	9,32
MgO	20,70	23,40	33,10	26,70	29,65
CaO	7,93	7,90	4,90	9,51	7,28
Na^2O	1,48	1,30	0,76	1,23	0,44
K^2O	0,62	0,54	0,37	0,53	0,46
TiO^2	2,07	1,88	0,70	1,02	0,49
P^2O^5	0,25	0,38	0,05	traces	0,06
H^2O à 105°	»	1,62	0,40	2,70	1,96
» au rouge	»	»	0,59	»	»
	100,29	100,47	100,11	100,84	100,26

On remarquera dans ces roches la faible proportion de l'alumine et des

[1] Cette analyse est celle qui a été publiée dans ma Note précitée; elle a été rectifiée pour le fer et pour son état d'oxydation.

alcalis, la haute teneur en magnésie, avec diminution rapide du titane à mesure que la magnésie augmente; enfin, la proportion de la chaux est faible vis-à-vis de la magnésie et cette propriété est la caractéristique différentielle d'avec le groupe suivant.

Ankaramites. — Je propose de désigner sous ce nom des roches voisines des précédentes, mais plus calciques, généralement un peu moins ferrugineuses et un peu plus riches en silice : elles se distinguent surtout des picrites en ce qu'à l'inverse de ce qui s'observe dans celles-ci, le pyroxène prédomine sur le péridot. De plus, la quantité des éléments blancs est souvent un peu plus grande. Ce sont des hétéromorphes de pyroxénolites. Le type de ces roches peut être pris à Madagascar dans la province pétrographique d'Ampasindava où elles accompagnent des roches alcalines. A quelques kilomètres au nord d'Ankaramy, j'ai observé en dykes, dans les grès du Lias, une roche magnifique de ce genre, constituée par une très grande quantité de gros cristaux d'augite verte de plus de 1^{cm}, associés à des cristaux d'olivine jaune à peine moins grands. Ils sont entourés par une pâte compacte, formée par de gros microlites d'augite, de titanomagnétite, avec un peu de biotite et du labrador. Dans d'autres filons, la teneur en phénocristaux est moindre, la quantité de feldspaths un peu plus grande et il existe des passages à des basaltes micacés et amphiboliques mésocrates. On peut rapporter au même type, mais avec plus de labrador, la lave d'Iconi, dans le sud-ouest de la Grande Comore; les caractères extérieurs rappellent ceux des picrites de la Réunion, mais la proportion des feldspaths y est plus grande.

Les analyses suivantes sont : Ankaramite. *a.* Nord d'Ankaramy (M. Boiteau) [*IV*.*5*.*3*.(*3*)(*4*)] IV.1'.'3.2.'2.

b. D'Iconi par M. Raoult [*IV*.*5'*.*3*.'*4*] IV.(1)(2).'3.2.2.

J'y joins pour comparaison l'analyse d'une roche grenue de Madagascar qui est à rapporter au même groupe, mais avec accentuation du caractère mélanocrate et aussi avec prédominance plus grande du pyroxène sur le péridot :

c. Pyroxénite feldspathique à olivine d'Ambatofotsy, à l'ouest d'Ankaramy [*IV*.*5*.(*3*)*4*.*4'*].IV.1(2).2.2.2.

	a.	b.	c.
SiO^2	43,27	45,84	46,01
Al^2O^3	7,54	7,45	6,36
Fe^2O^3	2,32	1,66	4,22
FeO	6,18	9,64	7,52
MgO	17,65	16,76	16,95
CaO	13,72	12,64	15,10
Na^2O	1,26	1,38	1,11
K^2O	1,14	0,99	0,40
TiO^2	1,25	3,00	1,36
P^2O^5	0,38	0,42	0,70
H^2O à 105°	0,22	0,10	0,11
» au rouge	»	0,32	0,48
CO^2	4,32	»	»
	100,54	100,20	100,32

Dans la région d'Ankaramy, les ankaramites sont très souvent calcifiées par suite de la décomposition du pyroxène et aussi de l'olivine ; une partie du CO^2 de l'analyse *a* doit être considérée comme ayant déplacé une quantité équivalente de la silice de ces deux minéraux.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les développements de la racine carrée d'un polynome en fractions continues.* Note de M. **Paul Appell.**

I. Il résulte des recherches d'Abel (¹) et de Jacobi (²), qu'un certain développement en fraction continue de la racine carrée d'un polynome du quatrième degré se rattache à la détermination des intégrales pseudo-elliptiques et à la multiplication des fonctions elliptiques. La méthode de calcul de Jacobi a été reprise et perfectionnée par Halphen (³). Abel, dans son premier Mémoire (*loc. cit.*), considère le cas où le degré du polynome R dépasse le quatrième, et Jacobi termine le sien (*loc. cit.*) par ces mots :

(¹) *Sur l'intégration de la formule différentielle* $\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, R *et* ρ *étant des fonctions entières* (*Journal de Crelle*, t. 1; *Œuvres complètes d'Abel*, Christiania, 1881, t. 1, p. 104). — *Théorie des transcendantes elliptiques* (*Œuvres*, t. 2, p. 87).

(²) *Note sur une nouvelle application de l'Analyse aux fonctions elliptiques* (*Journal de Crelle*, t. 7, p. 41; *Œuvres complètes de Jacobi*, Berlin, 1881, t. 1, p. 329).

(³) *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. 2, chap. XIV, p. 575.

« Lorsque R surpasse le quatrième degré, la fraction continue dans laquelle on convertit $\sqrt{R}$ dépend des formules de multiplication de transcendantes plus élevées que les transcendantes elliptiques. »

L'objet de cette Note est de préciser cette vue et de montrer comment le problème dépend de la multiplication des fonctions abéliennes ou de leurs dégénérescences.

II. A l'époque d'Abel et de Jacobi, le sens de l'expression *développement d'une fonction en fraction continue* était mal défini. On doit à un mathématicien français, M. Padé [1], la définition précise du problème du développement en fractions continues d'une fonction développable en série entière. M. Padé a montré que, pour une fonction donnée $f(x)$, il existe une infinité de développements en fractions continues dont les réduites

$$\frac{U_\mu}{V_\nu}$$

sont les quotients de deux polynomes en x, de degrés μ et ν donnés à l'avance, choisis de telle façon que le développement en série entière de

$$\frac{U_\mu}{V_\nu} - f(x)$$

commence par la puissance de x la plus élevée possible. Ces diverses réduites peuvent être rangées dans un Tableau à double entrée, défini par le réseau de points dont les coordonnées, par rapport à deux axes rectangulaires, sont les entiers positifs ou nuls μ et ν. Nous considérerons ici une suite particulière de ces réduites, représentées par des points situés sur une parallèle à la bissectrice de l'angle des axes.

III. Soit un polynome $R(x)$ de degré $4q$. La courbe

$$y^2 = R(x) \qquad (1)$$

(1) Padé, *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1892, 3e série, t. 9, S. p. 3). — *Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle* (*Ibid.*, 1899, t. 16, p. 395). — *Recherches nouvelles sur la distribution des fractions rationnelles approchées d'une fonction* (*Ibid.*, 1902, t. 19, p. 153). — *Recherches sur la convergence des développements en fractions continues*, et *Sur la généralisation des formules de Sylvester* (*Ibid.*, 1907, t. 24, p. 341 et 519).

est une courbe hyperelliptique de genre

$$p = 2q - 1.$$

Adoptons les notations d'Halphen (*loc. cit.*) et cherchons à développer la fonction

$$y = \sqrt{R(x)} = \sqrt{R(\xi + x - \xi)},$$

où ξ est une constante arbitraire, en une fraction continue de M. Padé, en prenant comme variable

$$x - \xi.$$

Soit une réduite de son tableau

$$\frac{U_\mu(x-\xi)}{V_\nu(x-\xi)};$$

les polynomes U_μ et V_ν sont déterminés de telle façon que

$$\frac{U_\mu}{V_\nu} - \sqrt{R(x)} = ((x-\xi))^{\mu+\nu+1},$$

la notation $((x-\xi))^\lambda$ signifiant une série entière en $x - \xi$ commençant par le terme de degré λ. On a donc également

$$U_\mu - V_\nu\sqrt{R(x)} = ((x-\xi))^{\mu+\nu+1}$$

et, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$(2) \qquad U_\mu^2 - V_\nu^2 R(x) = ((x-\xi))^{\mu+\nu+1}.$$

Dans cette identité (2) le premier terme est de degré 2μ, le second de degré $2\nu + 4q$. Nous choisirons les indices μ et ν de façon que ces degrés soient égaux

$$\mu = \nu + 2q.$$

Supposons d'autre part qu'il s'agisse d'une réduite donnant une approximation d'ordre déterminé $2m + 1$, on devra prendre

$$\mu + \nu = 2m,$$

d'où

$$\mu = m + q, \qquad \nu = m - q,$$

où m peut toujours être pris assez grand pour être supérieur à q. Mais alors le premier membre de (2) est un polynome de degré $2\mu = 2m + 2q$ en $(x - \xi)$ et l'on a, puisque $(x-\xi)^{2m+1}$ est en facteur,

$$(3) \qquad U_\mu^2 - V_\nu^2 R(x) \equiv (x-\xi)^{2m+1}(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_p),$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ étant des constantes fonctions de ξ et p étant le genre

$$p = 2q - 1.$$

Appliquons le théorème d'Abel à la courbe fixe (1) coupée par la courbe

$$(4) \qquad U_\mu - y V_\nu = 0,$$

variable avec le paramètre ξ. D'après l'identité (3), pour une valeur donnée de ξ, les deux courbes (1) et (4) ont en commun $2m + p + 1$ points variables avec ξ, à savoir $2m + 1$ points confondus d'abscisse ξ et p points simples d'abscisses $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$. Soit alors $u_i(x)$ une intégrale abélienne de première espèce attachée à la courbe hyperelliptique (1). D'après le théorème d'Abel, la somme des valeurs de cette intégrale correspondant aux points d'intersection de (1) avec (4) est constant; on a donc

$$(5) \qquad u_i(\xi_1) + u_i(\xi_1) + \ldots + u_i(\xi_p) \equiv C_i - (2m+1)\, u_i(\xi),$$

où

$$i = 1, 2, \ldots, p,$$

les C_i désignant des constantes indépendantes de ξ, déterminées à des multiples près des périodes.

Ces équations (5) déterminent $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ en fonction de ξ. On voit que le calcul de ces quantités est ramené à la multiplication de l'argument des fonctions abéliennes par $2m + 1$.

Si le degré du polynome R est $4q + 2$, le genre p est $2q$; on fera un raisonnement analogue en prenant

$$\mu - \nu = 2q + 1, \qquad \mu + \nu = 2m + 1.$$

On sera conduit à la multiplication par $2m + 2$.

IV. Dans le cas où le polynome R a des racines multiples, et dans le cas où l'on prend pour $\mu - \nu$ une valeur constante différente de celle que nous avons choisie, on est conduit au *problème d'inversion de Jacobi généralisé* et à la multiplication des fonctions correspondantes.

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

M. **Friedmann** adresse un Mémoire intitulé : *Sur les tourbillons dans un liquide à température variable.*

(Renvoi à l'examen de M. Boussinesq.)

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Étude photographique des taches solaires, par le R. P. S. Chevalier, S. J. (Présenté par M. P. Puiseux.)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la convergence des séries de Fourier.* Note [1] de M. **W.-H. Young**, présentée par M. E. Picard.

1. Un criterium général pour la convergence d'une série de Fourier en un point donné manque, et les cas où une telle convergence peut être constatée sont d'autant plus importants qu'ils sont encore assez rares. Entre ceux-ci il y en a un que j'avais signalé il y a cinq ans, mais qui semble avoir échappé à l'attention des géomètres. Je reviens maintenant sur ce cas, en simplifiant les conditions et étendant la portée du théorème.

2. Théorème. — *Si $f(x)$ est simplement discontinue au point x et si dans un voisinage de ce point, aussi petit que l'on veut, nous avons*

$$\frac{1}{2}[f(x+h)+f(x-h)] = \frac{1}{h}\int_0^h g(t)\,dt,$$

$g(t)$ étant une fonction bornée ou, plus généralement, telle que

$$\frac{1}{h}\int_0^h |g(t)|\,dt$$

soit une fonction bornée de h, la série de Fourier de $f(x)$ converge au point x vers $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Pour démontrer ce résultat, il suffit évidemment de prendre l'origine pour le point donné et de supposer $f(x)$ une fonction paire. Posons

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n; \qquad C(na_n) = \frac{(a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n)}{n},$$

donc

$$(1) \qquad s_n - C(na_n) = \frac{(s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1})}{n},$$

---

(1) Séance du 31 juillet 1916.

a_n étant le coefficient de $\cos nx$ dans la série de Fourier de la fonction $f(x)$. Or, comme $f(x)$ est bornée dans le voisinage de l'origine et s'approche de $f(+0)$ comme limite, la série de Fourier est convergente pour $x=0$ par les moyens de Cesàro (C1), c'est-à-dire que $\frac{(s_1+s_2+\ldots+s_{n-1})}{n-1}$ a une limite unique et finie quand n croît indéfiniment. D'après (1) donc notre série de Fourier convergera pour $x=0$, si $C(na_n)$ a la limite zéro quand n croît indéfiniment. Nous allons voir que ceci est exact.

3. Nous avons, en effet, le théorème suivant : *Si $\Sigma a_n \cos nx$ est la série de Fourier d'une fonction paire $f(x)$,*

$$\lim_{n\to\infty} C(na_n)=0,$$

quand les conditions suivantes sont remplies : 1° $f(+0)$ existe et est finie; 2° Dans un certain voisinage de l'origine $(-e\leqq x\leqq e)$, $f(x)$ peut être mise sous la forme $\frac{1}{x}\int_0^x g(x)\,dx$, où $\frac{1}{x}\int_0^x |g(x)|\,dx$ est une fonction bornée.

Or

$$\frac{1}{2}\pi C(na_n)=C\left\{\int_0^\pi n\cos nx\, f(x)\,dx\right\}$$
$$=\frac{1}{2n}\int_0^\pi \frac{d}{dx}\left[\cot\frac{1}{2}x-\operatorname{coséc}\frac{1}{2}x\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]f(x)\,dx,$$

donc

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\pi\lim_{n=\infty} C(na_n)=\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{2n}\int_0^\pi\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}x}-\frac{\cos nx}{\frac{1}{2}x}\right)f(x)\,dx\right].$$

Divisons l'intervalle $(0,\pi)$ en trois parties : $(0,p)$, (p,e) et (e,π), où $p=\frac{2P\pi}{n}$; P est un entier quelconque et n suffisamment grand. Mais notre résultat ne dépend nullement du caractère de $f(x)$ en dehors du voisinage de l'origine. Nous pouvons donc mettre $f(x)=0$ dans l'intervalle (e,π), et la partie correspondante de notre intégrale sera nulle.

Dans l'intervalle $(0,p)$, mettons $x=\frac{t}{n}$; $f\left(\frac{t}{n}\right)$ est alors bornée et a pour limite $f(+0)$; nous pouvons donc multiplier par la fonction bornée

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)$$

et intégrer terme à terme. Nous aurons alors

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\int_0^p f(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1-\cos nx}{x}\right)dx$$
$$=\lim_{n=\infty}\int_0^{2P\pi} f\left(\frac{t}{n}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt=\int_0^{2P\pi} f(+0)\frac{d}{dt}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt=0.$$

L'équation (2) devient donc

$$(3)\quad \frac{1}{2}\pi \lim_{n=\infty} C(na_n) = \lim_{n=\infty}\int_p^e f(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1-\cos nx}{nx}\right)dx = \lim_{n=\infty}\int_p^e x\,f(x)\frac{d}{dx}q_n(x)\,dx$$

$$= \lim_{n=\infty}\left\{[x\,f(x)\,q_n(x)]_p^e - \int_p^e g(x)\,q_n(x)\,dx\right\},$$

où

$$(4)\quad |q_n(x)| = \left|\frac{1-\cos nx}{nx^2} - \int_x^e \frac{1-\cos nx}{nx^3}dx\right| \leq \frac{2}{nx^2} + \int_x^e \frac{2}{nx^3}dx \leq \frac{3}{nx^2}.$$

Il en suit

$$(5)\quad \left|\frac{\pi}{6}\lim_{n=\infty} C(na_n)\right| \leq \lim_{n=\infty}\left\{\left|\left[\frac{f(x)}{nx}\right]_p^e\right| + \int_p^e \frac{|g(x)|}{nx^2}dx\right\}$$

$$\leq \frac{f(p)}{2P\pi} + \lim_{n=\infty}\left\{\left|\left[\frac{1}{nx^2}\int_0^x |g(x)|\,dx\right]_p^e\right| + \int_p^e\left[\frac{2\int_0^x |g(x)|\,dx}{nx^4}\right]dx\right\}$$

$$\leq \frac{f(p)}{2P\pi} + \frac{B}{2P\pi} + \lim_{n=\infty} 2B\int_p^e \frac{dx}{nx^2} \leq \frac{f(p)+3B}{2P\pi},$$

B étant la borne supérieure de $\frac{1}{x}\int_0^x |g(x)|\,dx$. On en conclut facilement

$$\lim_{n=\infty} C(na_n) = 0.$$

4. Pour une fonction impaire $f(x)$ qui remplit les conditions 1° et 2° (n° 3), il y aura un théorème analogue : *Soit* $\Sigma b_n \cos nx$ *la série alliée à la série de Fourier*, $\Sigma b_n \sin nx$, *de notre fonction* $f(x)$, *nous aurons*

$$\lim_{n=\infty} C(nb_n) = \frac{1}{\pi}[f(+0) - f(-0)].$$

Or, si $\frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^\pi \cot\frac{1}{2}x[f(x+u) - f(x-u)]\,dx$ a une limite unique et finie quand ε s'approche de zéro, la série alliée converge par les moyens de Cesàro vers cette même limite, pourvu que $f(x)$ soit bornée et n'ait pas une discontinuité de seconde espèce à l'origine. On a ainsi le résultat suivant :

Si $f(x)$ *est continue au point* x, *et si dans un voisinage de ce point, aussi petit qu'on veut, nous avons*

$$\frac{1}{2}[f(x+h) - f(x-h)] = \frac{1}{h}\int_0^h g(t)\,dt,$$

$g(t)$ étant une fonction bornée ou, plus généralement, telle que la fonction

$$\frac{1}{h}\int_0^h |g(t)|\,dt$$

soit bornée, la série alliée à la série de Fourier de $f(x)$ converge vers

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^\pi \cot\frac{1}{2}x[f(x+u)-f(x-u)]\,dx,$$

quand cette limite existe.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Théorème de la moyenne relatif aux intégrales d'une équation importante aux dérivées partielles.* Note (¹) de M. **Michel Petrovitch**, présentée par M. Émile Picard.

Dans une Note précédente (²), j'ai signalé les applications possibles d'une relation d'inégalité aux intégrales des équations différentielles ordinaires. Le procédé s'applique également aux intégrales de types généraux d'équations aux dérivées partielles. Je traiterai ici, à titre d'exemple, le type d'équations

$$(1)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2=f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où f est une fonction de variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$.

Considérons un domaine D dans l'espace des variables $x_1, \ldots, x_n$, dans lequel l'intégrale V est réelle et où chacune des dérivées $\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}$ garde un signe invariable. Soit ε_k l'unité affectée du signe invariable de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x_k}$ dans ce domaine. Je me propose de démontrer le théorème suivant :

En posant

$$(2)\qquad u_k=\varepsilon_{k+1}x_{k+1}-\varepsilon_1 x_1,$$

à toute intégrale V de l'espèce considérée correspond une fonction

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$$

(¹) Séance du 7 août 1916.

(²) *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 81.

et un facteur θ *dépendant des variables* $x_1, \ldots, x_n$, *mais toujours compris entre* 1 *et* $\sqrt{n}$ (*pouvant aussi coïncider avec l'une ou l'autre de ces limites*), *de telle sorte qu'on ait pour tout point* $M(x_1, \ldots, x_n)$ *situé dans le domaine* D

$$(3) \qquad V = \varepsilon_1 \theta F(x_1, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) + \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}),$$

où F *est une fonction de* n *variables* $x_1, u_1, \ldots, u_{n-1}$ *fournie par le second membre de l'équation* (1) *par une quadrature.*

Pour le faire voir, remarquons que, la fonction f étant essentiellement positive dans le domaine D, l'équation (1) peut s'écrire

$$(4) \qquad \sqrt{\left(\varepsilon_1 \frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\varepsilon_n \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2} = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

avec $\varphi = \sqrt{f}$. Or, si dans la formule (4) de la Note citée on fait

$$f(x) = x^2,$$

et si l'on y remplace x_i par $\varepsilon_i \dfrac{\partial V}{\partial x_i}$, on obtient

$$(5) \qquad \sqrt{\left(\varepsilon_1 \frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\varepsilon_n \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2} = \zeta\left(\varepsilon_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + \varepsilon_n \frac{\partial V}{\partial x_n}\right),$$

où ζ est un facteur, fonction de $x_1, \ldots, x_n$, dont la valeur est toujours comprise entre $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et 1. On y arrive, d'ailleurs, aussi directement par l'identité

$$n(a_1^2 + \ldots + a_n^2) - (a_1 + \ldots + a_n)^2 = \frac{1}{2}\Sigma(a_i - a_j)^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\, j = 1, 2, \ldots, n),$$

faisant voir que, pour les a_i réels et positifs, la valeur du rapport $\dfrac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{(a_1 + \ldots + a_n)^2}$ est comprise entre $\dfrac{1}{n}$ et 1, ces limites étant atteintes, la première lorsque les a_i sont égaux entre eux, et la seconde lorsque tous les a_i, sauf un parmi eux, tendent vers zéro.

Il s'ensuit que l'équation (4) peut s'écrire

$$(6) \qquad \varepsilon_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + \varepsilon_n \frac{\partial V}{\partial x_n} = \theta\,\varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

où θ est un facteur, fonction des x_i, compris entre 1 et $\sqrt{n}$.

On a ainsi à intégrer l'équation linéaire du premier ordre (6). A cet effet, il y a à considérer le système

$$(7) \qquad \varepsilon_1 \frac{dx_1}{1} = \varepsilon_2 \frac{dx_2}{1} = \ldots = \varepsilon_n \frac{dx_n}{1} = \frac{dV}{\theta\varphi},$$

d'où l'on tire

(8)
$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} x_1 + C_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_n} x_1 + C_{n-1} \end{cases}$$

avec

(9)
$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \varepsilon_1 \theta \varphi.$$

Si dans le second membre de (9) on remplace $x_2 \dots x_n$ par leurs valeurs (8), l'équation (9) prendra la forme

(10)
$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \varepsilon_1 \theta \psi(x, C_1 \dots C_{n-1}),$$

ψ étant une fonction de x_1 et de $n-1$ constantes arbitraires $C_1 \dots C_{n-1}$. On en tire

(11)
$$V = \varepsilon_1 \int \theta \psi \, dx_1 + C_n,$$

C_n étant une nouvelle constante arbitraire. La fonction ψ gardant un signe invariable, on aura par l'application du théorème commun de la moyenne

(12)
$$V = \varepsilon_1 \theta' F(x_1, C_1 \dots C_{n-1}) + C_n,$$

où

$$F(x_1, C_1 \dots C_{n-1}) = \int \psi(x_1, C_1 \dots C_{n-1}) \, dx_1 \qquad (1 \leqq \theta' \leqq \sqrt{n}).$$

D'autre part, de (8) et (12) on tire

(13)
$$C_k = x_{k+1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{k+1}} x_1 \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

(14)
$$C_n = V - \varepsilon_1 \theta' F(x_1, C_1 \dots C_{n-1}),$$

de sorte qu'en posant

(15)
$$u_k = \varepsilon_{k+1} x_{k+1} - \varepsilon_1 x_1 \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

(16)
$$u_n = V - \varepsilon_1 \theta' F(x_1, C_1 \dots C_{n-1}),$$

toutes les intégrales V de l'espèce considérée satisferont à des relations de la forme

(17)
$$\Psi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

c'est-à-dire à des relations de la forme (3), comme il fallait le montrer.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les formes quadratiques et les fonctions hyperabéliennes.* Note [1] de M. GEORGES GIRAUD, transmise par M. Émile Picard.

Parmi les groupes que M. Picard a appelés *hyperabéliens*, ceux qui sont isomorphes aux groupes des transformations semblables arithmétiques de formes quadratiques quaternaires indéfinies du type $u_1^2+u_2^2-u_3^2-u_4^2$ ont été, dans divers cas particuliers, étudiés par M. Picard, puis par M. Bourget et par M. Cotty [2]. Dans chacun de ces cas, ces auteurs ont pu former le polyèdre fondamental du groupe par la méthode de réduction continuelle, et ont trouvé que les fonctions hyperabéliennes correspondantes sont liées trois à trois par des relations algébriques.

Or la méthode de réduction continuelle peut s'appliquer aussi dans le cas général : on obtient ainsi sur le polyèdre fondamental des renseignements tels qu'il devient facile de retrouver d'une manière générale la conclusion sur l'existence d'une relation algébrique entre trois fonctions hyperabéliennes correspondant à un de ces groupes.

Les conditions de réduction adoptées sont celles de MM. Korkine et Zolotareff; on peut ajouter à ces conditions des inégalités supplémentaires telles que la réduite soit unique.

Si $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ est la forme donnée, Δ son discriminant, $F(\lambda, \mu, \nu, \pi)$ sa forme adjointe, $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \pi_0$ les conjugués de λ, μ, ν, π, la forme définie dont on fait la réduction continuelle est

$$(1)\qquad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\frac{\lambda_0\dfrac{\partial F}{\partial\lambda}+\mu_0\dfrac{\partial F}{\partial\mu}+\nu_0\dfrac{\partial F}{\partial\nu}+\pi_0\dfrac{\partial F}{\partial\pi}}{4\Delta} f(x_1, x_2, x_3, x_4) + 2\,\text{norme}\,(\lambda x_1+\mu x_2+\nu x_3+\pi x_4),$$

avec les conditions

$$(2)\qquad F(\lambda, \mu, \nu, \pi) = 0,$$

$$(3)\qquad \lambda_0\frac{\partial F}{\partial\lambda}+\mu_0\frac{\partial F}{\partial\mu}+\nu_0\frac{\partial F}{\partial\nu}+\pi_0\frac{\partial F}{\partial\pi} < 0;$$

en général, cette dernière quantité sera prise égale à -4Δ.

---

[1] Séance du 14 août 1916.

[2] PICARD, *Sur les fonctions hyperabéliennes* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. 1, 1885). — BOURGET, *Sur une classe particulière de groupes*

On établit alors les deux propositions suivantes :

1° Si φ est réduite pour une infinité de points (λ, μ, ν, π) ayant un point d'accumulation réel sur la quadrique (2), ce point a pour coordonnées $\lambda = \mu = \nu = 0$, $\pi = 1$: cela vient de ce que, pour ce point, φ est carré parfait. La forme proposée et son adjointe peuvent donc représenter zéro.

2° Si les points où φ est réduite ont un point d'accumulation imaginaire annulant le premier membre de (3), la quadrique (2) contient la génératrice rationnelle $\lambda = \mu = 0$, et le point d'accumulation est sur cette génératrice. Ainsi, la quadrique $f = 0$ a dans ce cas des génératrices rationnelles.

On démontre que, si une quadrique a des génératrices rationnelles, les deux génératrices qui passent par un point rationnel quelconque de la quadrique sont rationnelles.

Le cas où la quadrique n'a pas de points rationnels a été complètement traité par M. Picard. Dans les autres cas, la difficulté est de voir que le nombre des formes équivalentes à f qu'on rencontre dans la réduction continuelle est fini. En cherchant à se rapprocher de la marche de M. Picard, on trouve qu'il suffit de prouver qu'à chacune des formes équivalentes qu'on rencontre correspond une forme φ où le coefficient de x_1^2 est supérieur à une limite fixe : or c'est ce qui arrive ; la limite peut être prise égale à $\frac{1}{\Delta}$ s'il n'y a pas de génératrices rationnelles, à $\frac{\sqrt{3}}{2\Delta}$ s'il y en a. En effet, si ce coefficient tombe au-dessous de cette limite, il est égal à $2\lambda^2$, en supposant, comme il est permis, λ réel et positif. Or, s'il n'y a pas de génératrices rationnelles, la forme continue d'être réduite si l'on fait croître $2\lambda^2$ jusqu'à la limite indiquée, les parties réelles de $\frac{\mu}{\lambda}$ et de $\frac{\nu}{\lambda}$ restant fixes ainsi que les parties imaginaires de μ et de ν ; la valeur de π résulte de celles de ces lettres par la relation (2) et la relation (3), où le premier membre est pris égal à -4Δ. S'il y a des génératrices rationnelles, on arrive au même résultat par des variations simultanées de λ et de la partie imaginaire de μ, les parties réelles de $\frac{\mu}{\lambda}$ et de $\frac{\nu}{\lambda}$ restant fixes.

La conclusion à laquelle on parvient ainsi est que, s'il y a sur la quadrique

---

hyperabéliens (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1898, et *Thèses de la Faculté des Sciences de Paris*, 1898). — Cotty, *Les fonctions abéliennes et la Théorie des nombres* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1912, et *Thèses de la Faculté des Sciences de Paris*, 1913).

des points rationnels, mais pas de génératrices rationnelles, le polyèdre fondamental du groupe hyperabélien atteint la frontière du domaine fondamental, composé de deux demi-plans limités aux axes réels, en des points réels en nombre fini. S'il y a des génératrices rationnelles, il atteint cette frontière en un nombre fini de portions de variétés à deux dimensions, comprenant un nombre fini de points réels.

Pour prouver alors que la relation qui existe entre trois fonctions hyperabéliennes est algébrique, il suffit d'étudier les singularités de ces fonctions aux points rationnels et aux points des génératrices rationnelles. Pour cette étude, on peut mettre f sous la forme

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + \psi(x_2, x_3),$$

et porter l'attention sur le point rationnel $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 1$, et sur les génératrices qui passent par ce point, si elles sont rationnelles. On trouve que, si ψ satisfait à certaines conditions qu'on peut remplir par un changement de variables, les fonctions thêta-hyperabéliennes sont, en ces points, le produit d'une fonction rationnelle, qui disparaît dans les fonctions hyperabéliennes, par une fonction holomorphe de $e^{\frac{2\pi i x_2}{d x_1}}$ et de $e^{\frac{2\pi i x_3}{d x_1}}$ $\Big(\frac{x_2}{x_1}$ et $\frac{x_3}{x_1}$ sont, si $f = 0$, liées aux variations ξ et η de l'espace hyperabélien par des relations linéaires$\Big)$. Cela suffit pour démontrer notre proposition.

Des raisonnements analogues peuvent s'appliquer aux formes quadratiques quinaires $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2$, auxquelles correspondent des fonctions de trois variables faisant partie d'une catégorie que j'ai étudiée dans ma Thèse.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur un théorème géométrique utile pour l'étude de l'inversion directe des intégrales abéliennes.* Note (1) de M. **A. Liljeström**, présentée par M. Appell.

On peut dire sans exagération que jusqu'à nos jours le problème de l'inversion directe des intégrales abéliennes est resté obscur. Malgré les travaux de M. Casorati (fondés sur les conceptions de Riemann) qui eurent pour but de diriger l'attention des géomètres vers ce problème et vers les fonctions multiplement périodiques qui en dérivent, personne ne s'en est

(1) Séance du 14 août 1916.

occupé. Ce manque d'intérêt est sans doute la conséquence des idées vagues et peut-être même fausses qui ont été lancées par Jacobi [1], Fuchs [2] et Weierstrass [3] et qui ont dirigé l'intérêt vers un autre problème d'inversion, celui de Jacobi.

Par l'artifice de Jacobi on a pu éviter les graves difficultés provenant de la non-uniformité des fonctions multiplement périodiques d'une seule variable, mais on a introduit une autre très grande difficulté, celle de l'emploi des fonctions de plusieurs variables. Grâce aux travaux de Poincaré et de M. Appell, ainsi qu'à ceux de Riemann et de Weierstrass, on a surmonté la plupart de ces difficultés, de telle sorte que la théorie des fonctions périodiques de plusieurs variables constitue maintenant une partie très importante des sciences mathématiques.

Cela ne devrait pas empêcher l'étude des fonctions multiplement périodiques d'une seule variable qui ont du reste une importance capitale dans la Physique mathématique [4]. Faire une théorie de ces fonctions, c'est d'abord étudier leurs propriétés analytiques, soit en général, soit en particulier, et ensuite trouver des moyens pour leur calcul numérique, y compris chercher des relations entre elles qui puissent faciliter ce calcul.

Dans mon Mémoire déjà cité, j'ai fait l'étude des propriétés générales de ces fonctions et montré leur grande analogie avec les fonctions elliptiques. Il existe surtout un certain domaine, le *domaine des périodes*, qui joue envers les fonctions multiplement périodiques le même rôle que le parallélogramme des périodes vis-à-vis des fonctions elliptiques. Il en résulte que l'étude particulière d'une intégrale donnée est réduite à chercher la forme du domaine des périodes et à déterminer la position et le caractère des points singuliers dans ce domaine.

En se bornant aux fonctions inverses des intégrales de la forme

$$\int C\Pi(u-u_\nu)^{\alpha_\nu}\,du,$$

où les α_ν sont des exposants constants quelconques, on peut obtenir ce résultat d'une manière graphique extrêmement claire et simple. En effet,

---

(1) *Crelles Journal*, Bd 13, 1834; *Jacobis Werke*, Bd 1.

(2) *Berliner Berichte*, 15 janvier 1885.

(3) *Weierstrass Werke*, Bd 4, 1902, p. 445.

(4) Liljeström, *Études sur la théorie du potentiel logarithmique* (*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, Bd 7, n° 39. Stockholm, 1912).

soit

$$u = x + iy, \qquad t = X + iY, \qquad \frac{dt}{du} = C\Pi(u - u_\nu)^{\alpha_\nu},$$

on peut représenter u comme fonction de t au moyen des courbes $X = \text{const.}$ et $Y = \text{const.}$ dans le plan des u, et en conclure aisément le caractère des courbes $x = \text{const.}$ et $y = \text{const.}$ dans le plan des t.

Or, on peut déterminer les courbes $X = \text{const.}$ et $Y = \text{const.}$ de la manière suivante. Posons

$$C = \rho_0 e^{i\varphi_0}, \qquad u - u_\nu = \rho_\nu e^{i\varphi_\nu}, \qquad \varphi = -\varphi_0 - \Sigma\alpha_\nu\varphi_\nu, \qquad \rho = \Pi\rho_\nu,$$

nous obtiendrons

$$\frac{dt}{du} = \rho e^{-i\varphi} = \rho\cos\varphi - i\rho\sin\varphi,$$

mais on sait que

$$\frac{dt}{du} = \frac{\partial Y}{\partial y} + i\frac{\partial Y}{\partial x},$$

donc

$$-\frac{\frac{\partial Y}{\partial y}}{\frac{\partial Y}{\partial x}} = \operatorname{tang}\varphi,$$

ce qui montre que *l'angle que fait la tangente en un point de la courbe* $Y = \text{const.}$ *avec l'axe des x est égal à la somme φ.*

Il est évident que, grâce à ce théorème, on peut même construire une espèce de planimètre qui trace les courbes $X = \text{const.}$ et $Y = \text{const.}$, les points u_ν étant donnés.

Au point de vue de la Géométrie, ledit théorème constitue une nouvelle méthode de construction des tangentes, méthode dont on connaît déjà un cas spécial classique, savoir la construction des tangentes aux sections coniques. Cette méthode s'applique à un grand nombre de courbes importantes, par exemple aux ovales de Cassini, liées à l'intégrale

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2},$$

et aux courbes de Seebeck, liées à l'intégrale

$$\int \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2u^2)}}.$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une méthode nouvelle pour résoudre le problème de Riemann.* Note [1] de M. **René Garnier**, transmise par M. Hadamard.

1. Soit E une équation différentielle linéaire, d'ordre m, dont les coefficients sont rationnels par rapport à la variable indépendante x, et dont les singularités (effectives) sont régulières et au nombre de n. Proposons-nous de *choisir* E *de telle sorte que son groupe de monodromie soit un groupe donné* G; c'est le problème qu'on appelle *problème de Riemann*, en mémoire du géomètre qui, le premier, en a traité un cas particulier ($m = 2$, $n = 3$). Qu'il me suffise de rappeler que ce problème n'a été résolu dans toute sa généralité que par M. Plemelj; son Mémoire utilise la théorie des équations intégrales; il avait été précédé d'un travail de M. Hilbert, relatif au cas de $m = 2$.

Dans cette Note, je vais montrer comment les considérations développées dans mes trois Notes précédentes [2] fournissent une méthode nouvelle pour résoudre le problème. Je supposerai $m = 2$, $n = 4$; quant à l'extension au cas $m = 2$, n quelconque, elle exige, au préalable, qu'on étende aux équations de ma Thèse les méthodes développées dans ces trois Notes pour l'équation (VI).

2. Pour $m = 2$, $n = 4$, G dépend de six paramètres distincts; les coefficients de E ne peuvent en contenir le même nombre que si E renferme un point singulier apparent, λ; on peut alors lui donner la forme suivante [3]

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{1}{y}\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{d}{x(x-1)} + \frac{3}{4(x-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\beta}{x(x-1)(x-\lambda)},$$

où a, b, c, d sont quatre paramètres, immédiatement connus dès qu'on donne G. Faisons varier t; on sait que le groupe de E ne pourra rester constant que si λ vérifie par rapport à t l'équation (VI), de plus α prendra la

---

(1) Séance du 14 août 1916.

(2) *Comptes rendus*, t. **162**, 1916, p. 939; t. **163**, 1916, p. 8 et 118.

(3) J'ai introduit cette forme dans ma Thèse (Paris, Gauthier-Villars, 1911, p. 51).

valeur $\alpha(\lambda', \lambda, t)$ (1re Note, n° 3) et l'on aura $\beta = \dot{\alpha} - \alpha$ (2e Note, n° 3). Pour résoudre le problème de Riemann, il faut donc construire (si possible) une intégrale $\lambda(t)$ de (VI) telle que le groupe de E coïncide avec G pour une valeur *particulière* de t (problème B).

Or, faisons tendre t vers zéro suivant un chemin $\mathcal{C}$; nous savons choisir $\mathcal{C}$ de telle sorte, par exemple, que $|\lambda(t)|$ ne devienne pas infiniment petit et que α tende vers une valeur finie α_0; je dis qu'*on peut calculer* α_0 *au moyen de* G. En effet, à une distance finie de zéro et t, décrivons un contour $\mathcal{L}$ enveloppant ces deux points; si t tend vers zéro, les intégrales de E sont, sur $\mathcal{L}$, continues par rapport à t. La substitution correspondant à $\mathcal{L}$ de l'équation E_1 vers laquelle tend E est donc aussi S; on a, par suite,

$$4\alpha_0 = s_0^2 - 4a - 4c + 1,$$

$s_0 : 2$ étant l'invariant de la substitution unimodulaire S. Dès lors, le problème B se ramène aussitôt au suivant [*où n'intervient plus que l'équation* (VI)] :

α_0 et α_1 étant deux quantités finies données, *déterminer une intégrale* $\lambda(t)$ *de* (VI) *telle que* $\alpha(t)$ *tende vers* α_0 *ou* α_1 *lorsque* t *tend vers* o *ou* 1 suivant deux chemins $\mathcal{C}_0$ ou $\mathcal{C}_1$ bien déterminés.

Je vais indiquer maintenant, dans ses grandes lignes, la solution du nouveau problème (problème C).

3. Soit t_0 un point quelconque ($\neq 0, 1, \infty$), relié à O par un chemin L, qui dans le voisinage de O coïncide avec $\mathcal{C}_0$. Je dis qu'*on peut trouver une intégrale de* (VI) *telle que, sur* L, $\alpha(t)$ *tende vers* α_0 *ou* α_1 *suivant que* t *tend vers* o ou t_0 (problème D). En effet, l'étude des caractéristiques de (VI) montre [1] que le problème D est possible lorsque t_0 est assez près de O (sauf, peut-être, pour une valeur particulière de α_1, mais cette restriction n'a pas d'importance pour la suite). On a donc le droit de définir un arc $\widehat{O\tau}$ comme étant le plus grand arc de L, issu de O, pour tous les points duquel D est possible; s'il ne l'est plus pour l'arc complémentaire $\widehat{\tau t_0}$, on voit aisément que $\widehat{\tau t_0}$ est *fermé*, en sorte que tout revient à établir que D est possible en τ. Or toutes les intégrales de (VI), telles que α prend sur $\mathcal{C}_0$ la valeur α_0 en $t = 0$, sont définies par les valeurs λ_1 qu'elles prennent en un point t_1 de $\mathcal{C}_0$, suffisamment près de O; et, d'après un théorème de M. Painlevé,

---

[1] Cf. *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 120.

la fonction $\alpha(t;\lambda_1, t_1;\alpha_0) \equiv \alpha(t, \lambda_1)$, calculée sur L pour $t = \tau$, coïncide avec une branche d'une fonction de λ_1, méromorphe pour $\lambda_1 \neq 0, 1, t_1, \infty$. Considérons alors l'équation $\alpha(t, \lambda_1) = \alpha_1$; par hypothèse, pour tout point de $\widehat{O\tau}$ (sauf τ), la fonction $\lambda_1(t)$ ainsi définietend vers une limite bien déterminée; il faut prouver que t, tendant vers τ, λ_1 *n'est pas indéterminé*. Or, c'est ce qu'on démontre *en étendant au cas actuel la méthode donnée par M. Painlevé pour le premier théorème fondamental des équations du premier ordre.*

4. Dès lors, pour résoudre C, il ne reste plus qu'à établir que, si t_0 tend vers 1, $\lambda_1(t_0)$ tend vers une limite. A cet effet, on montre d'abord, à l'aide du théorème de Borel-Lebesgue, que si $|\alpha_0|$ est borné supérieurement, $|\lambda - 1|$ a une borne inférieure positive, quand t tend vers 1 suivant un chemin $\mathfrak{C}_1$, transformé d'une médiane de première espèce; par suite, pour une telle intégrale, $|\alpha(t_0) - \alpha_1|$ et $\left|\frac{\partial\alpha(t_0)}{\partial\alpha_1} - 1\right|$ sont arbitrairement petits sur $\mathfrak{C}_1$ pour $|t-1|$ assez petit; on peut donc trouver un nombre α_1 tel que la solution $\alpha(t)$ du problème D (aux constantes $\overline{\alpha}_1, t_0$) prenne en $t = 1$ la valeur α_1; c'est cette solution qui fournira la solution du problème de Riemann; et l'on voit en même temps que cette solution est *unique*.

HYDRODYNAMIQUE. — *Développements sur le mouvement d'un fluide parallèle à un plan fixe.* Note de M. **Richard Birkeland**, présentée par M. Appell.

Soient u, v, k trois fonctions de x, y continues, uniformes avec leurs dérivées partielles du premier ordre dans une aire A limitée par une courbe C; désignons par u', v', k' les valeurs de ces quantités dans l'élément d'aire $d\sigma$ de coordonnées x', y' et dans l'élément d'arc ds, et par α', β' les cosinus directeurs de la normale intérieure au point ds. Considérons

$$(1)\quad \begin{cases} R_1 = \int_A \zeta' k' \, d\sigma, \quad R_2 = \int_C G' k' \, ds, \quad \zeta' = \dfrac{\partial v'}{\partial x'} - \dfrac{\partial u'}{\partial y'}, \quad G' = v'\alpha' - u'\beta', \quad R = R_1 + R_2, \\ \Phi_1 = -\int_A \theta' k' \, d\sigma, \quad \Phi_2 = -\int_C q'_n k' \, ds, \quad \theta' = \dfrac{\partial u'}{\partial x'} + \dfrac{\partial v'}{\partial y'}, \quad q'_n = u'\alpha' + v'\beta', \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2. \end{cases}$$

Les intégrales curvilignes sont prises dans le sens direct. En opérant comme dans ma Note précédente [1], il vient, quand k' est une fonction

[1] *Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 973.

des différences $x - x'$ et $y - y'$,

$$(2) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} = -\int_A u' \Delta k' \, d\sigma, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x} = -\int_A v' \Delta k' \, d\sigma.$$

Pour $k' = \log \frac{1}{r}$, $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$, il vient, suivant que le point $M(x, y)$ est à l'intérieur ou à l'extérieur de A,

$$(3) \qquad \left.\begin{matrix} 2\pi u(x, y) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \left.\begin{matrix} 2\pi v(x, y) \\ 0 \end{matrix}\right\} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x},$$

et ces formules subsistent aussi dans le cas des lignes de discontinuité pour les dérivées partielles. Nous allons supposer données dans A les valeurs de ξ et θ et sur C les valeurs de q_n. Les valeurs de G sur C sont alors déterminées par une équation intégrale bien connue. En effet, nous pouvons supposer $q_n = 0$ sur C, car dans le cas contraire nous pouvons déterminer un vecteur $\overline{p}(\lambda, \mu)$ par la condition $\lambda\alpha + \mu\beta = q_n$ (sur C) et considérer le vecteur $\overline{m} = \overline{q} - \overline{p}$ au lieu de $\overline{q}$. Nous pouvons donc supposer $\Phi_2 = 0$. Cela posé, désignons d'une manière générale par $\varphi(t)$ une fonction φ des coordonnées d'un point $t(x, y)$ de la courbe C qui a une tangente déterminée en chaque point et par $\alpha(t)$, $\beta(t)$ les cosinus directeurs de la normale intérieure au point t. Il vient

$$G(t) = v(t)\,\alpha(t) - u(t)\,\beta(t).$$

En multipliant les formules préliminaires (2) par $-\beta(t)$ et $\alpha(t)$ et en ajoutant il vient une formule que nous allons appliquer au cas $k' = \log \frac{1}{r}$ et à l'aire A_1 comprise dans A et extérieure à un petit cercle c autour de t. Lorsque c tend vers le point t nous obtenons à la limite, parce que $\Phi_2 = 0$,

$$(4) \qquad \pi G(t) + \int_b G(s) \frac{\cos\varphi}{r} ds = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \alpha(t) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \beta(t) - \frac{\partial R_1}{\partial x} \alpha(t) - \frac{\partial R_1}{\partial y} \beta(t),$$

φ étant l'angle entre la normale intérieure au point t et la droite joignant ce point avec le point $s(x', y')$ dans ds. L'expression à droite est connue. Cette équation intégrale détermine complètement les valeurs de $G(t)$ sur C.

Nous obtenons une équation intégrale *exactement de même forme* en connaissant sur C les valeurs de G lorsqu'il s'agit de trouver les valeurs de q_n.

Cela posé, considérons un fluide en mouvement dans le plan des x, y et limité dans ce plan par un contour C. Soient $\overline{q}(u, v)$ les vitesses à l'instant t.

En supposant connus, à l'instant t, les tourbillons et les divergences dans l'aire A limitée par C et les valeurs de q_n sur C les vitesses sont déterminées par (3) en résolvant une équation intégrale de la forme (4). Considérons

$$P = -\int_A \theta' \nu' \, d\sigma - \int_C q'_n \nu' \, ds, \qquad Q = \int_A \xi' \nu' \, d\sigma + \int_C G' \nu' \, ds, \qquad \operatorname{tang} \nu' = \frac{y - y'}{x - x'}.$$

Nous obtenons les formules (3) écrites sous les formes suivantes :

$$(5) \qquad \begin{cases} 2\pi u(x, y) = \dfrac{\partial(R - P)}{\partial y}, & 2\pi v(x, y) = -\dfrac{\partial(R - P)}{\partial x}, \\ 2\pi u(x, y) = \dfrac{\partial(\Phi + Q)}{\partial x}, & 2\pi v(x, y) = \dfrac{\partial(\Phi + Q)}{\partial y}. \end{cases}$$

Les équations des *lignes de courant* sont donc à l'instant t

$$(6) \qquad R - P = \text{const.}$$

et les équations des *lignes perpendiculaires* aux lignes de courant sont

$$\Phi + R = \text{const.}$$

Dans les parties du fluide où $\zeta' = 0$, ces dernières lignes sont des *lignes équipotentielles*.

ASTRONOMIE. — *Sur la périodicité de l'activité solaire et l'influence des planètes*. Note de M. V. **Kostitzin**, présentée par M. Puiseux.

1. Dans la Note présente je ne veux point défendre la théorie qui attribue la périodicité de l'activité solaire exclusivement à l'influence des planètes. Je crois qu'on doit chercher la cause du cycle solaire dans les conditions initiales de la nébuleuse primitive. Il est facile de voir que les irrégularités inévitables de sa structure ne manqueraient pas de produire des vibrations. Cela ne veut pas dire que je donne au hasard un rôle prépondérant. Au contraire, pour qu'un corps céleste puisse évoluer sans vibrations, un concours de circonstances vraiment extraordinaire serait indispensable.

2. Or, si la périodicité elle-même n'est pas due à l'action de planètes, elles pourraient bien provoquer des cycles secondaires se superposant au cycle principal. Avec la raréfaction et la mobilité extrêmes de la matière dans les régions extérieures du Soleil, chaque planète doit être accompagnée par une onde de marée. C'est peut-être à l'influence du frottement

de ces ondes qu'il faut attribuer le ralentissement de la rotation solaire, et la chaleur reçue par cette voie pourrait bien être une des sources de la vie du Soleil. Bref l'importance cosmique des marées planétaires est indéniable, mais sont-elles suffisantes pour expliquer l'apparition de cycles secondaires ?

3. Dans une Note récente M. Arctowski [1] a montré l'existence d'un cycle annuel dans l'activité solaire. Si c'est la marée gravitationnelle qui en est la cause, on doit découvrir aussi un cycle trimestriel de Mercure, un cycle de sept mois et demi de Vénus et un cycle de 12 ans de Jupiter aux amplitudes de même ordre de grandeur que le cycle terrestre. Mais ici une question se pose. Où doit-on chercher la cause du changement périodique d'une marée planétaire ? Si c'est l'excentricité de l'orbite qu'il faut considérer, alors Mercure et Jupiter sont plus favorisés que la Terre (ensuite les maxima et minima principaux du cycle annuel de M. Arctowski sont situés assez loin du périhélie et de l'aphélie terrestres). Si c'est l'angle de l'équateur solaire et de l'orbite planétaire, la Terre sans doute a l'avantage sur Mercure et Vénus, mais cet avantage est partagé par Jupiter. De plus, il paraît évident que l'influence de chacune de ces causes est trop petite pour expliquer l'effet observé. En tout cas, ce n'est pas le cycle terrestre qui devrait être découvert le premier. Peut-être cela dépend-il de ce que M. Arctowski se préoccupait spécialement du cycle terrestre.

4. Mais à côté de la marée gravitationnelle on pourrait présumer l'existence d'une *marée* électromagnétique. Si l'on accepte l'hypothèse que le champ magnétique d'un corps céleste a pour cause sa rotation autour d'un axe il devient évident qu'une grandeur électromagnétique analogue au facteur déformant de la théorie des marées doit être proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation et inversement proportionnelle au cube de la distance de la planète au Soleil. Ce sera une fonction périodique du temps avec une amplitude d'oscillation d'autant plus grande que l'angle formé par les axes du Soleil et de la planète est plus grand. La masse de la planète et l'importance de son atmosphère auront aussi une influence qu'il est difficile de préciser.

5. Il paraît presque établi que les périodes de rotation de Mercure et de Vénus sont les mêmes que les périodes de leurs révolutions autour du

---

(1) *Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 593.

Soleil. Alors, si l'on fait abstraction de leurs masses et de leurs atmosphères, leurs *facteurs déformants* électromagnétiques seraient respectivement 5 et 80 fois plus petits que celui de la Terre.

La masse et l'atmosphère de Mars sont trop insignifiantes pour qu'on puisse attendre de lui une action comparable à celle de la Terre, surtout si l'on prend en considération la distance de Mars au Soleil. Quant à Jupiter l'inclinaison de son axe est tellement petite qu'une variation périodique de sa « marée » électromagnétique dans un effet observable n'est guère probable. Uranus et Neptune sont si éloignés que la grandeur de leurs distances compense avec excès l'influence de leurs vitesses de rotation et des angles d'inclinaison de leurs axes. Il ne reste que Saturne dont l'action magnétique pourrait varier d'une manière observable. On voit donc que sous ce rapport la Terre occupe vraiment une situation privilégiée dans le système solaire. Il est remarquable que les époques des maxima et minima principaux du cycle annuel sont situées très près de celles des équinoxes et sont justement opposées pour les hémisphères Nord et Sud du Soleil. En dehors de l'hypothèse des « marées » électromagnétiques on ne voit pas une explication qui peut rendre compte de ces faits.

Il serait intéressant de rechercher dans les périodogrammes de l'activité solaire d'autres cycles secondaires et d'examiner à nouveau la question de l'influence de divers groupes de planètes, cette fois-ci au point de vue de l'hypothèse électromagnétique.

6. Il y a toutefois une objection grave à faire contre la manière de procéder de M. Arctowski. Il prend en bloc les observations de 1852 à 1913 et en déduit les moyennes mensuelles. La courbe qu'il obtient présente des maxima et minima. Or, si l'on prend au hasard une quantité de nombres qu'on distribue d'une façon arbitraire dans 12 groupes, par exemple, la courbe représentative de leurs moyennes aura toujours des maxima et minima tout comme les courbes de M. Arctowski. Ce qu'il serait important de faire c'est de montrer que ces maxima et minima se reproduisent plus ou moins régulièrement depuis la date des observations du Soleil. D'autre part, à ce qu'il paraît, il serait préférable de prendre les moyennes mensuelles séparément pour les époques des maxima et minima de l'activité solaire.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Action de la lumière sur l'iode et l'iodure d'amidon en milieu aqueux.* Note de M. H. **Bordier**, transmise par M. A. Gautier.

L'eau iodée n'est pas une véritable solution : j'ai montré (¹) que l'iode se trouve, en milieux aqueux, à l'état colloïdal, c'est-à-dire à l'état de particules ultra-microscopiques.

L'iodure d'amidon est également à l'état colloïdal en milieu aqueux.

J'ai constaté que les rayons solaires avaient une action sur ces deux pseudo-solutions. Pour déceler cette action, il est nécessaire de se placer dans des conditions telles que le phénomène ne soit pas masqué, et pour cela, il faut choisir une concentration très faible.

L'eau iodée peut se préparer en laissant tomber avec un compte-gouttes normal dix gouttes de teinture d'iode à 10 pour 100 dans un litre d'eau et en agitant après la chute de chaque goutte. L'eau iodée ainsi obtenue contient 18^{mg} d'iode, elle a une coloration jaune brun.

Pour l'iodure d'amidon on laisse tomber dans un litre d'eau additionnée d'un peu d'empois d'amidon fraîchement cuit trois gouttes de teinture d'iode au dixième : on obtient ainsi une belle liqueur bleue (²).

L'eau iodée et l'iodure d'amidon ainsi préparés se prêtent bien aux expériences que je vais décrire : il suffit de placer ces liquides dans des flacons en verre blanc et de les exposer à la lumière. Après quelques heures, on constate que l'iodure d'amidon est complètement décoloré, tandis que le même liquide conservé dans l'obscurité possède toujours sa belle couleur. On peut faire réapparaître la coloration bleue avec des traces d'iode ajoutées au liquide décoloré par la lumière.

L'eau iodée dans les mêmes conditions a également perdu sa couleur jaune et l'addition d'empois d'amidon ne donne plus aucune coloration bleue, alors que l'eau iodée témoin, conservée à l'abri des rayons solaires, se colore fortement en bleu.

L'iodure d'amidon et l'eau iodée faibles sont très commodes pour apprécier la qualité de protection des différents verres employés en

---

(¹) *Société de Médecine de Lyon*, 1er mai 1911 (*Lyon médical*, 23 juillet 1911, p. 174).

(²) Incidemment, je ferai remarquer que, quand l'empois d'amidon a fermenté, après quelques jours d'exposition à l'air, la coloration est violette au lieu d'être bleue. L'action de la lumière reste d'ailleurs la même.

Chimie et en Pharmacie dans le but de soustraire certaines substances à l'altération de la lumière : j'ai constaté que le verre jaune qui passe pour être le meilleur de ces verres, ou tout au moins qui est le plus employé, n'empêche nullement la décoloration de l'iodure d'amidon, pas plus que la disparition de l'iode de l'eau iodée.

Les modifications produites par la lumière sur l'iodure d'amidon et l'eau iodée sont dues évidemment aux rayons photochimiques du spectre : mais par quel mécanisme ?

L'hypothèse suivante peut être émise :

Les particules d'iode à l'état colloïdal sont chargées d'électricité et se comportent un peu comme de gros ions : par suite, les propriétés chimiques de ces particules électrisées ne sont pas exactement identiques à celles de de l'iode libre. Or les rayons violets et ultraviolets produisent des effets d'ionisation qui à la longue enlèveraient aux particules d'iode colloïdal leurs charges électriques : ces particules, ainsi déchargées, acquerraient des propriétés chimiques qu'elles n'avaient pas auparavant. Elles pourraient alors se combiner avec l'hydrogène de l'eau pour former de l'acide iodhydrique.

Avec l'iodure d'amidon, les choses se passeraient exactement de la même façon.

Dans l'un et l'autre cas, la réaction devient acide après la décoloration des liqueurs.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Relations entre la constitution chimique de certains dérivés des amino-acides et le mode d'attaque de ceux-ci par les bactéries.* Note [1] de M. A. **Blanchetière**, transmise par M. Armand Gautier.

Au cours d'un travail exécuté dans un tout autre ordre d'idées, j'ai été amené à me préoccuper de l'action du bacille fluorescent liquéfiant de Flügge sur l'asparagine.

En opérant sur le milieu suivant : $NaCl$ pur, 5^g; PO^4HNa^2 cristallisé, 1^g; PO^4HK^2 cristallisé, 1^g; asparagine, 5^g; H^2O distillée, quantité suffisante pour 1000^{cm^3}, j'ai pu constater la formation d'importantes quantités d'acide succinique : 2^l du milieu de culture précédent m'ont, en effet, fourni plus de 3^g d'acide succinique, ce qui donne un rendement approchant 50 pour 100

(1) Séance du 14 août 1916.

de la théorie. La production de l'acide succinique se fait par l'intermédiaire de l'acide malique.

Or d'autres auteurs ont constaté la production d'acide fumarique. Emmerling et Reiser ([1]) signalent l'absence d'acide succinique et la production d'acide fumarique sous l'action du fluorescens.

La personnalité d'Emmerling ne permettant pas de doute sur la réalité de ses constatations et, d'autre part, mes propres expériences mettant sans conteste en évidence la production d'acide succinique, il y avait lieu de rechercher l'explication de ces résultats divergents.

1° *Formation intermédiaire de l'acide α-cétonique.* — On sait que les travaux de Neubauer, Neuberg et leurs collaborateurs etc., ont mis en évidence la formation transitoire de l'acide α-cétonique dans le passage de l'α-amino-acide à l'α-hydroxy-acide.

Cette formation de l'acide α-cétonique, établie d'abord dans l'attaque des amino-acides par les organismes supérieurs, a été mise en évidence dans ces dernières années, surtout par les travaux de Neuberg et de son école, dans l'attaque de ces mêmes corps par les levures, puis par les bactéries.

En particulier, Neuberg et Ringer ([2]) ont mis en évidence la formation des acides oxalacétique et α-cétoglutarique dans l'attaque des acides aspartique et glutamique par des bactéries d'ailleurs indéterminées.

Je montrerai ailleurs qu'il en est de même avec le fluorescens dans le milieu indiqué précédemment.

2° *Conséquences de la formation de l'acide α-cétonique.* — Cette formation intermédiaire de l'acide α-cétonique me paraît de nature à expliquer les deux résultats constatés plus haut : soit que certaines races du fluorescens agissent de préférence sur la forme cétonique de l'acide et d'autres sur sa forme œnolique, soit que la forme œnolique soit plus stable dans certains milieux de culture que dans d'autres.

On peut en effet considérer l'acide α-cétonique sous deux formes :

A. *Forme cétonique :*

$$COOH - CH^2 - CO - COOH,$$

([1]) Emmerling et Reiser, *D. chem. Gesells.*, t. 35, 1902, p. 700.

([2]) C. Neuberg et M. Ringer, *Ueber das Wesen der natürlichen Bernsteinsäurebildung : I. Die Bernsteinsäuregärung der α-Ketoglutarsäure; II. Die Entstehung von Bernsteinsäure bei der Fäulnis von Ketoglutarsäure* (*Biochem. Zeits.*, t. 71, 1915, p. 226-236 et 237-244).

dont la réduction conduira tout d'abord à l'acide malique

$$COOH - CH^2 - CO - COOH + H^2 = COOH - CH^2 - CH(OH) - CHOH$$

puis à l'acide succinique

$$COOH - CH^2 - CH(OH) - COOH + H^2 = H^2O + COOH - CH^2 - CH^2 - COOH.$$

B. *Forme œnolique :*

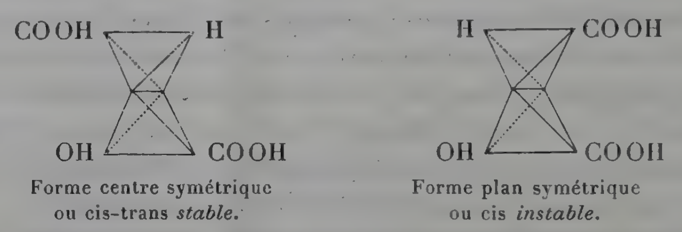
$$COOH - CH = C(OH) - COOH,$$

dont la réduction conduit à un acide non saturé

$$COOH - CH = C(OH) - COOH + H^2 = H^2O + COOH - CH = CH - COOH.$$

Je dis, sans plus m'avancer, à un acide non saturé, voyons lequel.

La forme œnolique de l'acide oxalacétique présente, en effet, l'isomérie géométrique et peut, dès lors, exister sous deux formes :



Forme centre symétrique ou cis-trans *stable.* — Forme plan symétrique ou cis *instable.*

La forme *centre symétrique* stable conduit, par réduction, à l'acide fumarique également stable, ce qui est conforme aux constatations d'Emmerling et Reiser, tandis que la forme *plan symétrique* instable conduit à l'acide maléique instable et qui, de fait, n'a pas été rencontré. Tout est donc conforme à l'expérience.

3° *Légitimité de la conception de la forme œnolique.* — Cette conception de la forme œnolique est généralement admise par les chimistes comme forme transitoire dans la formation d'un certain nombre d'acides α-cétoniques.

Je n'en citerai qu'un exemple : celui de la formation de l'acide pyruvique par décomposition pyrogénée de l'acide tartrique (Berzelius) ou de l'acide glycérique (Moldenhauer), décomposition pyrogénée au cours de laquelle il se formerait d'abord un acide α-oxy-acrylique

$$\underset{\text{Acide tartrique.}}{COOH - CHOH - CHOH - COOH} = H^2O + CO^2 + \underset{\text{Acide α-oxy-acrylique.}}{COOH - C(OH) = CH^2},$$

$$\underset{\text{Acide glycérique.}}{COOH - CHOH + CH^2OH} = H^2O + \underset{\text{Acide α-oxy-acrylique.}}{COOH - C(OH) = CH^2},$$

que la chaleur transforme en son isomère, l'acide pyruvique

$$COOH - C(OH) = CH^2 = COOH - CO - CH^3.$$

De plus, dans la conception qu'on se fait actuellement du passage de l'α-amino-acide à l'acide α-cétonique, on admet l'existence d'un stade intermédiaire, l'hydrate d'imino-acide

$$COOH - CH^2 - \underset{\displaystyle NH^2}{\underset{|}{CH}} - COOH + O = COOH - CH^2 - \overset{\displaystyle OH}{\overset{|}{\underset{\displaystyle NH^2}{\underset{|}{C}}}} - COOH.$$

Dès lors, on s'explique facilement la formation de la forme œnolique par départ de 1^mol d'ammoniaque aux dépens de 2^at de carbone intermédiaires de ce dernier corps,

$$COOH - \overset{\displaystyle H}{\overset{|}{\underset{\displaystyle H}{\underset{|}{C}}}} - \overset{\displaystyle OH}{\overset{|}{\underset{\displaystyle NH^2}{\underset{|}{C}}}} - COOH = NH^3 + COOH - CH = C(OH) - COOH.$$

En somme, la conception de deux formes tautomères de l'acide oxalacétique correspond à la fois aux données théoriques et aux constatations expérimentales.

En se reportant aux travaux de Neuberg et de ses élèves concernant l'action des bactéries sur l'acide α-cétoglutarique

$$COOH - CH^2 - CH^2 - CO - COOH,$$

on arriverait à une conception analogue.

CHIMIE PHYSIQUE BIOLOGIQUE. — *Influence exercée par le degré de réduction des hémochromogènes sur leurs propriétés spectrales*. Note [1] de MM. **Ch. Dhéré** et **G. Vegezzi**, présentée par M. A. Dastre.

I. Nous avons fait connaître récemment [2] que la réduction, en *tube scellé*, par l'hydrosulfite de sodium en poudre, d'une solution alcoolique faible (55 pour 100 environ) et légèrement acide d'hématine pure, fournit de l'*hémochromogène acide* caractérisé par un spectre qui, très analogue d'aspect à celui de l'hémochromogène alcalin ordinaire, est pourtant dis-

---

[1] Séance du 31 juillet 1916.
[2] *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 18.

tinct de celui-ci, car les deux premières bandes sont décalées vers le rouge, les axes étant λ 564$^{\mu\mu}$,2 pour la bande α et λ 527$^{\mu\mu}$,7 pour la bande β.

Quand on effectue la réduction en *tube ouvert* (ou en tube bouché, mais non scellé), toutes les autres conditions restant semblables, on obtient un hémochromogène ayant un spectre assez différent : les deux bandes α et β ont respectivement pour axes λ 576 et λ 540, c'est-à-dire qu'elles sont fortement rejetées vers le rouge (ces axes coïncident à peu près avec ceux des bandes de l'oxyhémoglobine). En comparant ces deux hémochromogènes acides à des concentrations et sous des épaisseurs égales, on note aussi que l'hémochromogène acide préparé en tube ouvert offre des bandes relativement très faibles, la première étant notablement plus large, et que la liqueur est colorée en rouge bien moins vif.

II. Si l'on opère la réduction (toujours avec l'hydrosulfite de la solution alcoolo-aqueuse d'hématine pure), en milieu *fortement alcalin*, on observe des spectres encore plus différents suivant que la réduction a lieu en tube scellé ou non.

En *tube ouvert*, le spectre est constitué par deux bandes de largeurs très inégales : la bande α, relativement très étroite, a pour axe λ 590,7; la bande β, plus de trois fois aussi large, a pour axe λ 559,2. Ce spectre ne correspond pas du tout, on le voit, au spectre que présente l'hémochromogène acide en tube ouvert. Par contre, si l'on scelle le tube, le spectre de l'hémochromogène alcalin [1] devient sensiblement identique à celui de l'hémochromogène acide en tube scellé.

III. Nous avons maintenant à considérer l'influence qu'exerce le degré de réduction sur les propriétés spectrales de l'hémochromogène alcalin des auteurs ou *ordinaire*, qui, comme l'ont bien montré Bertin-Sans et Moitessier (1893), ne peut se former qu'en présence de protéines, de corps à fonction amine ou d'ammoniaque [2].

---

(1) Après ouverture du tube, on contrôle que la réaction est restée fortement alcaline.

(2) Rappelons que, d'après ces auteurs, l'hématine pure en solution *aqueuse* alcaline (dans de la soude à 1 pour 100 par exemple), après réduction par divers sulfures d'alcalis par le tartrate ferreux, par l'hydrosulfite de sodium, fournit un spectre à *une seule* bande (milieu sur la raie D). Pour notre part, en ajoutant de l'hydrosulfite de sodium en poudre à une solution *aqueuse*, fortement alcalinisée, d'hématine pure, nous avons obtenu une liqueur alcaline présentant un spectre manifestement à *deux* bandes ayant respectivement pour axes : λ 580 et λ 544. Il s'agit, d'ailleurs, de bandes assez faibles, à bords estompés.

Lorsqu'on ajoute à de l'hématine pure, en solution dans l'alcool faible alcalinisé, de l'hydrate d'hydrazine, il y a, comme en solution aqueuse, production d'hémochromogène ordinaire typique dont les bandes α et β ont respectivement pour axes : λ554,7 et λ520,0. Vient-on alors à sceller le tube, on observe, après agitation du contenu, que le spectre s'est profondément modifié : les deux bandes ont maintenant une intensité à peu près égale, et c'est même la bande β, si pâle auparavant, qui est devenue la plus foncée. Le spectre est donc d'un tout autre type, et l'on constate encore que les axes des bandes sont décalés vers le rouge. Ces axes sont respectivement : λ568,6 et λ533,4.

Les résultats sont analogues quand on réduit par l'hydrosulfite de sodium de l'hématine alcaline obtenue en faisant dissoudre de l'hémoglobine dans de l'alcool faible fortement alcalinisé : en tube ouvert, on a le spectre typique de l'hémochromogène ordinaire ([1]); en tube scellé, ce spectre se transforme en celui qui vient d'être décrit. Mêmes résultats aussi en opérant sur une solution alcoolo-aqueuse, fortement alcaline, d'hématine pure additionnée de protoprotéose et réduite par l'hydrosulfite.

IV. Il résulte donc de nos recherches que, soit l'*hémochromogène acide* (hémochromogène libre ou *prohémochromogène*), soit l'*hémochromogène alcalin* [hémochromogénate de sodium formé en l'absence de tout composé (autre que l'hématine) renfermant un groupement hydrogéné de l'azote], soit l'*hémochromogène alcalin ordinaire* (formé au moyen d'hydrate d'hydrazine ou en présence de protéines) offrent, en solutions alcoolo-aqueuses, des spectres d'absorption *très différents* suivant que la réduction a lieu en *tube scellé* ou en *tube ouvert*. Les positions des bandes de ces divers spectres sont groupées dans le Tableau suivant :

	En tube :	Bande α.	Bande β.
Hémochromogène *acide*	*scellé*....	571,5—557,0	535,0—520,5
	ouvert...	587,0—565,5	548,0—531,5
Hémochromogène *alcalin*	*scellé*....	572,2—557,0	535,0—519,7
	ouvert...	595,5—587,0	573,5—546,0
Hémochromogène alcalin *ordinaire*	*scellé*....	576,2—561,0	542,0—524,7
(hématine pure + hydrate d'hydrazine)	*ouvert*...	565,5—544,0	529,5—510,5

([1]) D'une façon plus précise, les axes des bandes sont λ558 et λ525. Notons que l'hémochromogène fourni par l'hydrosulfite a des bandes moins réfrangibles que celui fourni par l'hydrate d'hydrazine. L'hémochromogène préparé à partir d'hématine non purifiée (hémoglobine traitée par un alcali) a aussi des bandes moins réfrangibles que celui préparé à partir d'hématine pure.

L'intensité et la largeur relatives des bandes permettent, comme nous l'avons indiqué plus haut, de distinguer *plusieurs types* de spectres.

Nous croyons que les hémochromogènes obtenus en *tubes scellés* ne diffèrent des autres qu'en ce qu'ils constituent des produits de *réduction complète*. En effet, toutes les modifications déterminées par cette condition sont *réversibles*. Ainsi, supposons qu'on ouvre le tube scellé contenant la solution alcoolo-aqueuse d'hématine additionnée d'hydrate d'hydrazine (voir § III); lentement en laissant le tube ouvert au repos, rapidement par agitation du contenu à l'air, le spectre se modifie et les bandes de l'hémochromogène ordinaire apparaissent. Ce cas, pris comme exemple, nous montre que la formation de l'hémochromogène *ordinaire*, en solution alcoolo-aqueuse, exige non seulement la présence de certains composés azotés, mais encore, semble-t-il, le *concours de traces d'oxygène libre*.

La séance est levée à 15 heures trois quarts.

G. D.

ERRATA.

(Séance du 17 juillet 1916.)

Note de M. *J. Delphy,* Scoliose abdominale chez le *Mugil auratus* Risso, etc. :

Page 71, *fig.* 1 et 2, *au lieu de* $\times 1$, *lire* $\times \frac{1}{2}$.
Page 72, ligne 2, *au lieu de* la même, *lire* le même.
Page 73, ligne 9, *supprimer* subpiriforme.